به نام خدا

حل مثال :

$P_r(X=1)=\frac{1}{2}$ $\quad P_r(X=2)=\frac{1}{4}$ $\quad P_r(X=3)=\frac{1}{8}$ $\quad P_r(X=4)=\frac{1}{8}$

$P_{XY}(x,y)$

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0

$\longrightarrow P(y=1)=\frac{1}{4}$

$\longrightarrow P(y=2)=\frac{1}{4}$

$\longrightarrow P(y=3)=\frac{1}{4}$

$\longrightarrow P(y=4)=\frac{1}{4}$

$$H(X,Y)=\sum_x\sum_y P(x,y)\log\frac{1}{P(x,y)}=\underbrace{\frac{1}{8}\log 8+\frac{1}{16}\log 16+2\times\frac{1}{32}\log 32}_{H\left(\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{16}\log 16+\frac{1}{8}\log 8+2\times\frac{1}{32}\log 32}_{H\left(\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}+H\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16},\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)+H\left(\frac{1}{4},0,0,0\right)$$

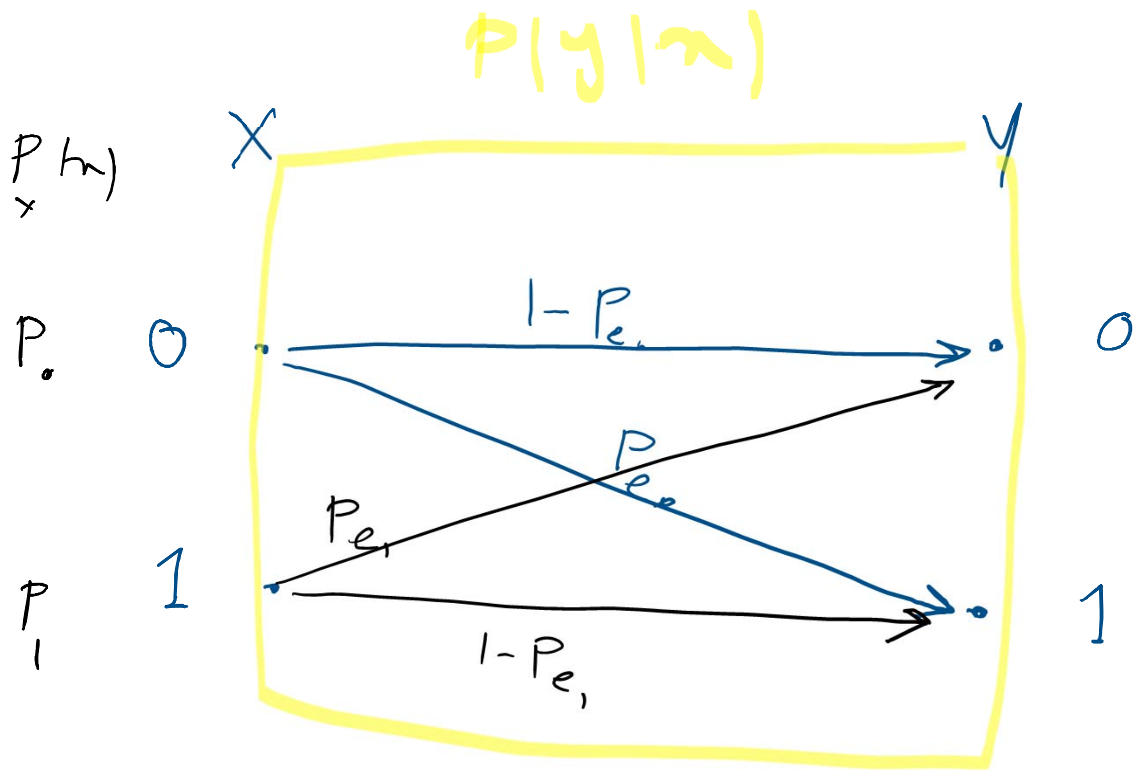
$$\Rightarrow H(Y) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \log 4 = 2$$

$$\Rightarrow H(X) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Channel Capacity ظرفیت کانال

مثال - کانال های باینری

کانال های باینری یکی از متداول ترین مدلها برای بیان کانال های باینری در مخابرات است



$$P(y=0 \mid x=0) = 1-P_{e_0}$$

$$P(y=1 \mid x=0) = P_{e_0}$$

$$P(y=1 \mid x=1) = 1-P_{e_1}$$

$$P(y=0 \mid x=1) = P_{e_1}$$

اگر $P_{e_0} = P_{e_1} = P_e$ آنگاه کانال را یک کانال باینری متقارن می‌گوییم.

Binary Symmetric channel (BSC)

که از متداول‌ترین مدل‌های مورد استفاده برای کانال‌های گسسته است.

$$C_{BSC} = \max_{P_X(x)} I(X;Y) = \max_{P_X(x)} \left(H(Y) - H(Y|X) \right)$$

$$H(Y|X) = E_{P(x)}\left\{ H(Y|X=x) \right\}$$

$$= P_0\, H(Y|X=0) + P_1\, H(Y|X=1)$$

$$H(Y|X) = P_0\, H(P_e) + P_1\, H(P_e) = H(P_e)$$

$$C_{BSC} = \max_{P(x)} \Big(H(Y) - \overbrace{H(Y|X)}^{H(P_e)} \Big) = \underbrace{\max_{P(x)} H(Y)}_{} - H(P_e)$$

با توجه به تقارن مسأله توزیع یکنواخت x ، توزیع یکنواخت y را نتیجه می‌دهد داریم

$$H_{max}(Y) = H\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

راه حل کلی ، ابتدا با کمک قضیه احتمال کلی $P(y)$ را به دست می آوریم و $H(y)$ را محاسبه می کنیم و از $H(y)$ نسبت به $P(x)$ مشتق گیری می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم تا ماکزیمم مقدار $H(y)$ به دست بیاید. (اگر تقارن برقرار باشد، معمولا توزیع یکنواخت X ، به توزیع یکنواخت Y منجر می شود و مسأله به راحتی حل می شود)

قضیه احتمال کلی

$$P_r(y=0) = P_0\, \overbrace{P(y=0 \mid x=0)}^{1-P_e} + P_1\, \overbrace{P(y=0 \mid x=1)}^{P_e} = P_0(1-P_e)+P_1 P_e$$

$$P_r(y=1) = P_1\, (y=1 \mid x=1) + P_0\, (y=1 \mid x=0) = P_1(1-P_e)+P_0 P_e$$

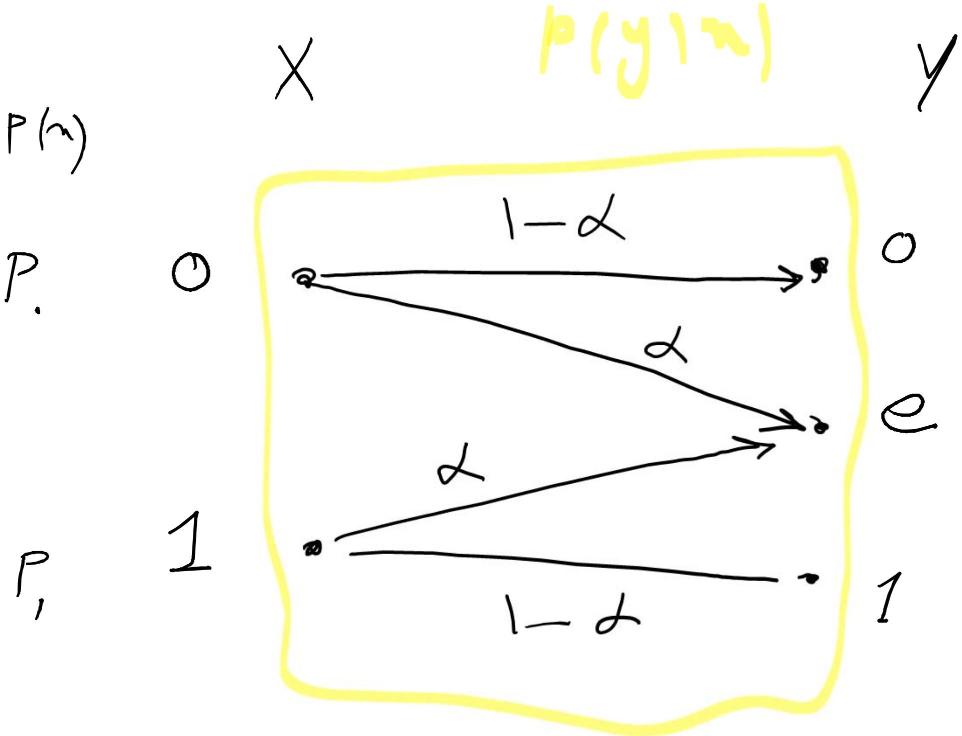
$$\frac{\partial H(Y)}{\partial P_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H(Y)}{\partial P_1} = 0$$

$$\Rightarrow P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C_{BSC} = 1 - H(P_e)$$

تمرین : ظرفیت کانال باینری را در حالت نامتقارن به دست بیاورید.

(Binary Erasure Channel) BEC مثال ۱ کانال



$P(y|x)$

$$P(y=0 \mid x=0) = 1-\alpha$$

$$P(y=e \mid x=0) = \alpha$$

$$P(y=1 \mid x=1) = 1-\alpha$$

$$P(y=e \mid x=1) = \alpha$$

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left(H(Y) - H(Y|X) \right)$$

$$H(Y|X) = E_{p(x)} \left\{ H(Y|X=x) \right\} = P_0 \, H(Y|X=0) + P_1 \, H(Y|X=1)$$

$$H(Y|X) = P_0 \, H(\alpha) + P_1 \, H(\alpha) = H(\alpha)$$

$$C = \max_{p(x)} \left(H(Y) - \overbrace{H(Y|X)}^{H(\alpha)} \right) = \max_{p(x)} H(Y) - H(\alpha)$$

قضیه احتمال کل

محاسبه $P(y)$

$$P_r(y=0) = P_0\, P(y=0 \mid x=0) = P_0(1-\alpha)$$

$$P_r(y=1) = P_1\, P(y=1 \mid x=1) = P_1(1-\alpha)$$

$$P_r(y=e) = P_0\, \overbrace{P(y=e \mid x=0)}^{\alpha} + P_1\, \overbrace{P(y=e \mid x=1)}^{\alpha} = \alpha$$

$$\Longrightarrow H(Y) = H\big(P_0(1-\alpha),\ P_1(1-\alpha),\ \alpha\big)$$

$$= -P_0(1-\alpha)\log P_0(1-\alpha) - P_1(1-\alpha)\log P_1(1-\alpha) - \alpha\log\alpha$$

$$\frac{\partial H(y)}{\partial P_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H(y)}{\partial P_1} = 0$$

$$\frac{\partial H(y)}{\partial P_0} = -\left((1-\alpha)\log P_0(1-\alpha) - P_0(1-\alpha)(1-\alpha)\frac{1}{P_0}\log 2\right) = 0$$

$$\frac{\partial H(y)}{\partial P_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P_0 = P_1 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} P_r(y=0) = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ P_r(y=1) = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ P_r(y=e) = \alpha \end{cases}$$

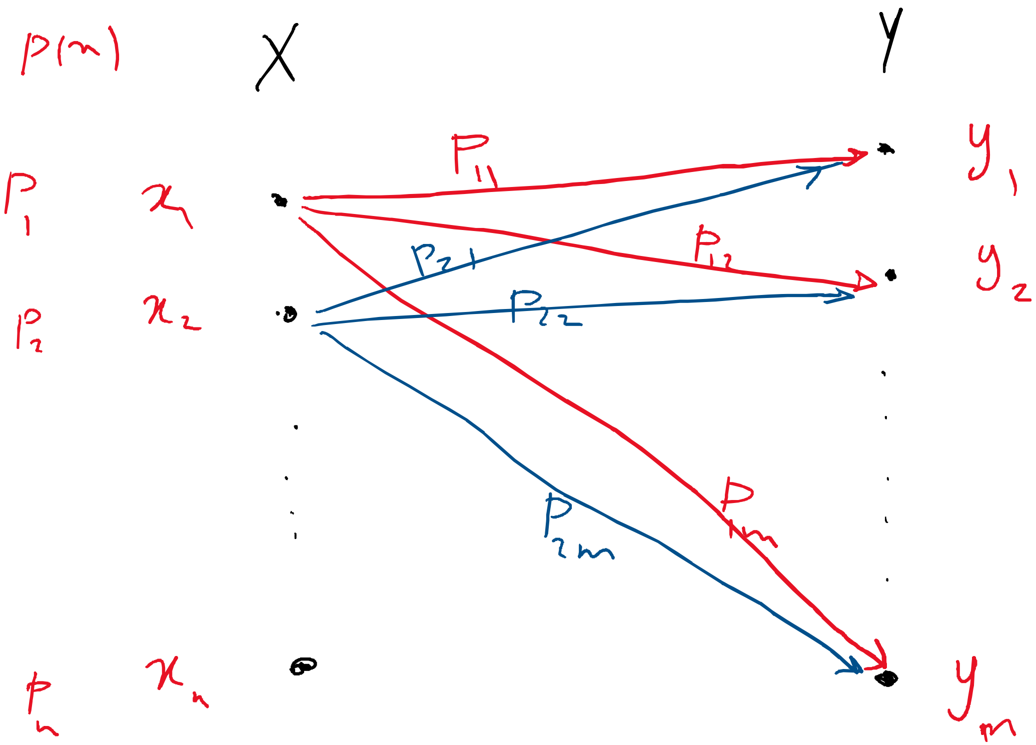
$$\Rightarrow C_{BEC} = H\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \alpha\right) - H(\alpha)$$

$$\Rightarrow C_{BEC} = -\frac{1-\alpha}{2} \times 2 \log\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \alpha \log \alpha - H(\alpha)$$

$$\Rightarrow C_{BEC} = \overbrace{-(1-\alpha)\log(1-\alpha) + (1-\alpha)\log 2 - \alpha\log\alpha}^{H(\alpha)} - H(\alpha)$$

$$\Rightarrow C_{BEC} = 1-\alpha$$

با توجه به مطالب گفته شده، می‌توانیم کانال‌های متقارن را در سیستم‌های گسسته تعریف کنیم. برای این منظور، مشخصه کانال، یعنی $p(y|x)$ را به صورت یک ماتریس که به آن ماتریس کانال گفته می‌شود، نمایش می‌دهیم.



* اولین شرط تقارن یک کانال گسسته این است که تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها با هم برابر باشند

$$|X| = |Y| \Rightarrow n = m$$

$$p(y \mid x) = P_r(Y = y \mid X = x)$$

$$P_r(Y = y_j \mid X = x_i) \equiv P_{ij}$$

$$[P_{ij}]_{n \times m} = \begin{array}{c|c} {}_{X}\diagdown^{Y} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \quad\cdots\quad & y_m \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

با توجه به نرمالیزه بودن توابع احتمال همواره داریم $\sum_j P_{ij} = 1 \quad , \forall i$

درمین شرط تقارن این است که سطرهای ماتریس گذار، جایگشت یکدیگر باشند.

سومین شرط تقارن این است که ستون های ماتریس گذار جایگشت یکدیگر باشند.

در ادامه می خواهیم ظرفیت را برای این کانال متقارن محاسبه کنیم. می دانیم

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left(H(Y) - H(Y|X) \right)$$

$$H(Y|X) = E_{P(x)} \{ H(Y|X=x) \}$$

$$H(Y|X=x_1) = H(P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1m}) = H(\text{سطر اول ماتریس}) = H(\underline{r})$$

$$H(y|X=x_2) = H(P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2m}) = H(\text{سطر دوم ماتریس}) = H(\underline{r})$$

$$\vdots$$

$$H(y|x_n) = H(P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nm}) = H(\text{سطر n ام ماتریس}) = H(\underline{r})$$

سطرها جابجایی یکدیگر هستند.

$$\Rightarrow \quad H(y|x) = E_{p(x)}\{H(y|x=x)\} = E_{p(x)}\{H(\underline{r})\} = H(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \quad C = \max_{p(x)} \Big(H(y) - \overbrace{H(y|x)}^{H(\underline{r})} \Big) = \max_{p(x)} H(y) - H(\underline{r})$$

باتوجه به تقارن مسئله می‌توان گفت که توزیع یکنواخت x ، توزیع یکنواخت y را نتیجه می‌دهد که

H(y) را ماکزیمم می‌کند.

$$H_{max}(y) = \log|\mathcal{Y}|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \log|\mathcal{Y}| - H(\underline{r})}$$

(قابل استفاده برای کانال‌های متقارن)

همان طور که دیدیم، در حل این مسئله از آنجا که تعداد خروجی ها با تعداد ورودی ها برابر است و آنکه ستون ها با جایگشت یکدیگر هستند، به طور مستقیم استفاده ای نکردیم. بنابراین می‌توانیم مفهوم تقارن ضعیف را نیز برای کانال های گسسته تعریف کنیم. محاسبه $p(y)$ در این راستا به ما کمک می‌کند.

$$P_r\{y=y_1\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{P(y=y_1 \mid x=x_i)}_{P_{i1}}$$

$$\vdots$$

$$P_r\{y=y_j\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \, P(y=y_j \mid x=x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i \, P_{ij}$$

$$\vdots$$

$$P_r\{y=y_m\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \, P(y=y_m \mid x=x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i \, P_{im}$$

به دلیل تقارن، توزیع یکنواخت X، توزیع یکنواخت Y را بدست می‌دهد یعنی اگر داشته باشیم

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{|X|}$$

$$\Rightarrow P_r\{Y = y_j\} = \frac{1}{|X|} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} P_{ij}}^{\text{جمع یک ستون از ماتریس گذار} = c} = \frac{c}{|X|} = \underbrace{\frac{1}{|Y|}}_{\text{توزیع یکنواخت } Y}$$

اگر $|X| = |Y|$ برقرار باشد، داریم $c = 1$

در غیر این صورت $c = \dfrac{|X|}{|Y|}$

⟸ شرط تقارن ضعیف را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم

۱ـ سطرها جایگشت همدیگر باشند

۲ـ حاصل جمع ستون‌ها با هم برابر باشند

به عنوان مثال، ظرفیت کانال‌های زیر را محاسبه کنید

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{متقارن}$$

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow$$ تقارن ضعیف

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-P_e & P_e \\ P_e & 1-P_e \end{bmatrix} \longrightarrow$$ BSC

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-P_{e_1} & P_{e_1} \\ P_{e_2} & 1-P_{e_2} \end{bmatrix}$$

نه متقارن است و نه تقارن ضعیف دارد

$$
[P_{ij}] = \begin{array}{c|ccc} x \backslash y & 0 & e & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & & \end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}
$$

→ تقارن دارد در تقارن ضعیف

(BEC)

برای هر کانال گسسته‌ای که تقارن داشته باشد یا تقارن ضعیف داشته باشد داریم

$$C = \log|\mathcal{Y}| - H(\underline{r})$$

* برخی خصوصیات ظرفیت کانال

۱- ظرفیت غیرمنفی است $C \geq 0$ زیرا $I(X;Y) \geq 0$

2- $C \leq \max H(Y) = \log|Y|$

3- $C \leq \max H(X) = \log|X|$

$$C = \max_{P(x)} I(X;Y)$$

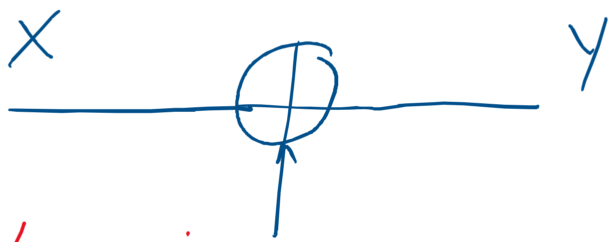
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

همان طور که گفتیم در این بخش، کانال های گسسته را مد نظر قرار دادیم. اما یک کانال پیوسته با عنوان کانال جمع شونده گوسی در سیستم های مخابراتی، کاربرد زیادی دارد که در این بخش می خواهیم با رابطه ظرفیت آن آشنا شویم. (وارد مباحث تئوری اطلاعات آن نمی شویم!)

$X \in \mathbb{R}$

$Y \in \mathbb{R}$



متغیر تصادفی گوسی $Z \sim N(0, \sigma^2)$

$$C = \max_{P(X)} I(X;Y) \qquad (*)$$

subject to power constraint P

$EX^2 \leqslant P$

با توجه به حل مسئله (*)

$$\Longrightarrow \quad C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\sigma^2}\right) \underset{\sigma^2 = N}{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

bits/transmition

از طرف دیگر می‌دانیم که هر سیستم مخابراتی یک پهنای باند مشخص W دارد. اگر ارسال اطلاعات را در این پهنای باند مشخص در نظر بگیریم و چگالی طیف توان نویز را برابر $\frac{N_0}{2}$ فرض کنیم، داریم:

$$\text{قدرت نویز} = \frac{N_0}{2} \times W \times 2 = N_0 W$$

$$\Longrightarrow \quad C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \quad \text{bit/s}$$

$$C = W \log(1 + SNR)$$

SNR: Signal to Noise Power Ratio